PART3 不等式の証明

要点 ① 実数の大小関係

2 つの実数 a, b について，$a \quad b$，$a \quad b$，$a \quad b$ のいずれか 1 つの関係だけが成り立つ。

実数の大小関係について，次の性質が成り立つ。

実数の大小関係①

1 $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$

2 $a>b \Rightarrow a+c>b+c$，$a-c>b-c$

3 $a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

2 より，実数の大小関係について，次の性質が成り立つ。

実数の大小関係②

4 $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

5 $a<b \Leftrightarrow a-b<0$

4 の証明

$a>b \Rightarrow a-b>b-b$　すなわち　$a-b>0$

$a-b>0 \Rightarrow a-b+b>0+b$　すなわち　$a>b$

よって　$a>b \Leftrightarrow a-b>0$

4 を，不等式の証明に用いることができる。

不等式 $A>B$ の証明

不等式 $A>B$ を証明するとき，$A-B>0$ が成り立つことを示してもよい。

例　$a>b$ のとき，不等式 $4a+3b>2a+5b$ を証明する。

$$=4a+3b-2a-5b=2a-2b=$$

$a>b$ より

よって $2(a-b)>0$

したがって，$(4a+3b)-(2a+5b)>0$ より，$4a+3b>2a+5b$

要点② 実数の平方

実数の大小関係から，$a>0 \Rightarrow a^2>0$，$a<0 \Rightarrow a^2>0$ がいえる。

また，$a=0 \Leftrightarrow a^2=0$ である。

よって，実数の平方について，次の性質が成り立つ。

実数の平方の性質

実数 a について　$a^2 \geqq 0$

等号が成立するのは，$a=0$ のときである。

このことを，不等式の証明に用いることができる。

例　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+y^2 \geqq 2xy$ を証明する。

$$(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=$$

よって $x^2+y^2 \geqq 2xy$

等号が成り立つのは，　　　　　，つまり $x=y$ のときである。

3 (1) $a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2) x，y が実数のとき，不等式 $9x^2+y^2 \geqq -6xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明

$A-B>0$ を示す。つまり，$A-B$ を計算し，その結果が正であることを示す。
正であることを示すときには，主に次の性質が用いられる。

(正)＋(正)＝(正)　　(正)×(正)＝(正)　　(負)×(負)＝(正)

実数の平方の性質

実数 a について　$a^2 \geqq 0$　(等号成立は $a=0$ のとき)

第 2 講　PART3 確認問題

1　$a>1$，$b>2$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$ab+2>2a+b$$

[証明]

$$(ab+2)-(2a+b)$$
$$=ab+2-2a-b$$
$$=\left(a-\boxed{\text{ア}}\right)b-\boxed{\text{イ}}(a-1)$$
$$=\left(a-\boxed{\text{ウ}}\right)\left(b-\boxed{\text{エ}}\right)$$

$a>1$，$b>2$ より

$$\left(a-\boxed{\text{ウ}}\right)\left(b-\boxed{\text{エ}}\right)>0$$

したがって

$$ab+2>2a+b$$

2　x，y が実数のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

[証明]

$$\left(x^2+25y^2\right)-10xy=x^2-10xy+25y^2$$
$$=\left(x-\boxed{\text{オ}}\,y\right)^2 \geqq \boxed{\text{カ}}$$

よって

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

等号が成り立つのは

$$x-\boxed{\text{キ}}\,y=0$$

つまり $x=\boxed{\text{ク}}\,y$ のときである。

PART3 不等式の証明

3 (1) $a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2) x，y が実数のとき，不等式 $9x^2+y^2 \geqq -6xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

[解答]

(1) $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1=(b-1)a-(b-1)=(a-1)(b-1)$

$a>1$，$b>1$ より $a-1>0$，$b-1>0$

よって　$(a-1)(b-1)>0$

したがって，$(ab+1)-(a+b)>0$ より，$ab+1>a+b$

(2) $(9x^2+y^2)-(-6xy)=9x^2+6xy+y^2=(3x+y)^2 \geqq 0$

よって　$9x^2+y^2 \geqq -6xy$

等号が成り立つのは，$3x+y=0$ のときである。

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2

[解説]

$$(ab+2)-(2a+b)=ab+2-2a-b \quad \text{[A]}$$
$$=(a-1)b-2(a-1)$$
$$=(a-1)(b-2)$$

$a>1$，$b>2$ より $a-1>0$，$b-2>0$

よって

$$(a-1)(b-2)>0 \quad \text{[B]}$$

したがって，$(ab+2)-(2a+b)>0$ より

$$ab+2>2a+b$$

> [A]　不等式 $A>B$ の証明
> $A-B>0$ が成り立つことを示す。

> [B]　正であることを示すのに用いられた性質
> (正)×(正)＝(正)

2

[正解] オ：5，カ：0，キ：5，ク：5

[解説]

$$(x^2+25y^2)-10xy=x^2-10xy+25y^2$$
$$=(x-5y)^2 \geqq 0 \quad \text{[C]}$$

よって

$$x^2+25y^2 \geqq 10xy$$

等号が成り立つのは

$$x-5y=0$$

つまり $x=5y$ のときである。

> [C]　実数の平方の性質
> 実数 a について
> $a^2 \geqq 0$　（等号成立は $a=0$ のとき）